

Quiz #1

Ονοματεπώνυμο: ΡΑΠΤΟΔΗΜΟΣ ΕΥΣΤΑΘΙΟΥΣ

ΑΕΜ: 507

1. Σωστή απάντηση η Α) Διατύπωση, επίλυση, ερμηνεία, υποποίηση

Η επίλυση ενός προβλήματος από έναν μηχανικό απαιτεί τέσσερα βήματα:

- Διατύπωση του προβλήματος
- Επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τις απαραίτητες μεθόδους που αυτό απαιτεί
- Ερμηνεία των αποτελεσμάτων του προβλήματος που βρήκατε
- Υποποίηση των αποτελεσμάτων που βρήκατε με κάποιο πρακτικό μηχανικό εργαλείο

2. Σωστή απάντηση το Δ) 3

$$\begin{aligned} \text{Έχω } x^3 - 3x^2 + x - 3 &= 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) + 1(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-3) = 0 \\ \Leftrightarrow x-3 &= 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ρίζα } (x^2+1 > 0) \end{aligned}$$

3. Η λύση δεν υπάρχει ως πιθανή απάντηση που μας έχετε δώσει.

$$25a + b + c = 0 \quad (1) \quad 64a + 8b + c = 155 \quad (2) \quad 144a + 12b + c = 155 \quad (3)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 39a + 7b = 155 \quad (4)$$

$$(3) - (1) \Rightarrow 119a + 11b = 155 \quad (5)$$

$$\text{από } (4) \Rightarrow a = \frac{155 - 7b}{39} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Από } (5) \wedge (6) \text{ έχω: } 3,051(155 - 7b) + 11b &= 155 \Rightarrow 472,905 - 21,357b + 11b = 155 \\ \Rightarrow -10,357b &= -317,905 \Rightarrow b = 30,695 \end{aligned}$$

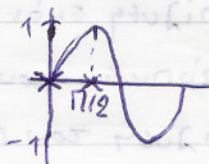
$$\text{Από } (4) \Rightarrow 39a = 155 - 214,865 \Rightarrow a = -1,535$$

$$\text{Από } (1) \Rightarrow -38,375 + 30,695 + c = 0 \Rightarrow c = 7,68$$

$$\text{Άρα } (a, b, c) = (-1,535, 30,695, 7,68)$$

4. Σωστή απάντηση η Β) 1.000

$$\int_0^{\pi/4} 2 \cos 2x dx = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = 2 \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = [\sin 2x]_0^{\pi/4} = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) - \sin(2 \cdot 0) = 1 - 0 = 1$$



5. Σωστή απάντηση η Α) -5.9399

Έχω $y = 2 \sin(3x)$ ή $\frac{dy}{dx} = 2[3 \cos 3x] = 6 \cos 3x$

Αρα $\frac{dy}{dx}(1.0) = 6 \cos[3(1.0)]$ *Χρησιμοποιώντας την αριθμομηχανή βρίσκω ότι $\cos(3.0) = -0.98999$

Αρα $\frac{dy}{dx}(1.0) = 6 \cdot (-0.98999) = -5.93994$

6. Σωστή απάντηση η Δ) 0.26667

Η σειρά Maclaurin για το $\sin(2x)$ είναι: $\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \dots =$

$= 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + \dots = 2x - 1.333x^3 + \boxed{0.26667}x^5 + \dots$

7. Σωστή απάντηση η Γ) 126.00

Η σειρά Taylor δίνεται ως: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$

Για $x=3$ και $h=4$ ($7-3$) έχω $f(7) = f(3) + f'(3) \cdot 4 + \frac{f''(3)}{2!}4^2 + \frac{f'''(3)}{3!}4^3 + \dots$

Δεδομένου ότι οι παράγωγοι του $f(x)$ είναι $f(x) = e^x$ έχω:

$$f(7) = f(3) + f'(3) \cdot 4 + \frac{f''(3)}{2!}4^2 = 6 + 32 + 11 \cdot 8 = 38 + 88 = 126$$

8. Σωστή ανάντηση η Γ) 24.46

Το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού είναι ευριστοφής:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2!} h^2$$

$$\text{Για } x=0, h=0,2 \text{ έχω: } y(0.2) = y(0) + y'(0) \cdot 0,2 + \frac{y''(0)}{2!} \cdot 0,02 = 3 + 29 \cdot 0,2 + 783 \cdot 0,02 = 3 + 5,8 + 15,66 = 24,46$$

$$\text{με } y(0)=3, y'(x)=y^3+2 \text{ κ' } y'(0)=3^3+2=27+2=29$$

$$y''(x) = 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3y^2(y^3+2) \text{ κ' } y''(0) = 3 \cdot 3^2(3^3+2) = 783$$

9. Σωστή ανάντηση η Β) $\cos(2x)$

$$\text{Γνωρίζω ότι } \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ Όπου } x \text{ το } 2x \text{ έχω:}$$

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot 4^n$$

10. Σωστή ανάντηση η Α) -0,75225

Οι τρεις πρώτοι όροι της σειράς Taylor γύρω από το $t=0$ για τη συνάρτηση που περιγράφεται μέσα στο ολοκλήρωμα δίν. $f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ είναι:

$$\bullet f(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\bullet f'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} (-2t), f'(0) = 0$$

$$\bullet f''(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} (-2t)(-2t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} (-2), f''(0) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

Χρησιμοποιώντας αυτά που βρήκα παραπάνω και δεδομένου ότι οι τρεις πρώτοι όροι της σειράς Taylor δίνονται από την: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!} h^2$
 $\Rightarrow f(h) = f(0) + f'(0) \cdot h + \frac{f''(0)}{2!} h^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + 0 + \left(-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right) \frac{h^2}{2!} \Rightarrow$

$$f(h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} h^2. \text{ Άρα } \operatorname{erf}(x) = \int_0^x \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^2 \right) dt = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} t - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x^3}{3}$$

Επομένως $\operatorname{erf}(2) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{16}{3\sqrt{\pi}} = -0,75225$ χρησιμοποιώντας επιβαρυντικό κοίτη λουρακι.

11. Σωστή απάντηση η Β) 5

$$\text{Έχω } R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \quad n \geq 0, \quad 0 \leq c \leq x$$

$$\text{για } x=0.1 \quad R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \quad n \geq 0, \quad 0 \leq c \leq 0.1$$

$$\text{Εάν } |f^{(n+1)}(c)| \leq 1 \text{ τότε } R_n(0.1) \leq \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} (1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Έτσι από το 2α: } R_n(0.1) < 10^{-6} \Rightarrow \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6} \Rightarrow n \geq 4$$

Δεδομένου ό/ως ότι η σειρά Maclaurin ό/ως όλων έκ. 6 περιέχει περίπου όρους, έχω ότι $n \geq 5$.